オプション講座
「アンリ・カルタン『複素函数論』を読む」*
第 1 回 講義報告†

数学工房‡

2008 年 5 月 14 日　19：00 ～ 21：00

概要

まず，第 I 章第 1 節の形式的ベキ級数に関して，その定義，代数，位数，代入を中心に解説した．特に，形式的ベキ級数における位数の意義と，形式的ベキ級数の無限和が定められる認容族と標準形について，詳しく検討した．

1　形式的ベキ級数

1.1　形式的ベキ級数の代数

1.1.1　形式的ベキ級数

定義 1.1 K を可換体，x を文字とする．K の元を係数とし，文字 x に関して収束を考慮しないで形式的に考えたベキ級数

$$\sum_{\nu \geq 0} a(\nu) x^{\nu} \qquad a(\nu) \in K \quad (\nu \in \mathbb{N}_0)$$

を，x に関する**形式的ベキ級数**という．多項式全体の集合 $K[x]$ に対して，形式的ベキ級数全体の集合を $K[[x]]$ と記す．

■注　以下，本講義では，形式的ベキ級数はラテン大文字で記し，係数についてはテキストと異なり，次のような数列（写像）としての表記を用いる．

$$F(x) := \sum_{\nu \geq 0} \widehat{F}(\nu) x^{\nu} \qquad \widehat{F} : \mathbb{N}_0 \longrightarrow K$$

形式的ベキ級数 F と数列 $\widehat{F}$ は，定義から明らかなように，1：1 で対応している．

* 本講座では，Henri Cartan 著「複素函数論」を教科書として，複素解析の基礎を学習する．予習・復習を前提とし，読みにくい場所，問題にしていることは何か，そこに至る背景は何かなどといったことに焦点を絞り解説する．高橋禮司訳（岩波書店）の本は絶版であるが，古書として入手可能である．

† reported by S.K.

‡ http://www.sugakukobo.com

1.1.2　加法とスカラー倍

定義 1.2 $F, G \in K[[x]]$ について，2 つの形式的ベキ級数の**和**を

$$(F+G)(x) := F(x) + G(x)$$

によって定め，また，形式的ベキ級数と $\lambda \in K$ との**スカラー倍**を

$$(\lambda F)(x) := \lambda(F(x))$$

と定める．なお，**加法単位** 0 は**零級数** $\widetilde{O}(x) = \sum_{\nu \geq 0} 0x^{\nu}$ である．これにより，形式的ベキ級数の集合 $K[[x]]$ は線形空間の構造をもつ．

1.1.3　乗法

定義 1.3 $F, G \in K[[x]]$ について，2 つの形式的ベキ級数の**積**を

$$\begin{aligned}(FG)(x) &:= F(x)G(x)\\ &:= \sum_{\sigma \geq 0} \underbrace{\Big(\sum_{\nu+\mu=\sigma} \widehat{F}(\nu)\widehat{G}(\mu) \Big)}_{\text{数列の Cauchy 積}} x^{\sigma}\end{aligned}$$

と定める．すなわち，形式的ベキ級数の積の係数は，数列の Cauchy 積を用いて定義される．

$$\widehat{FG}(\sigma) := \sum_{\nu+\mu=\sigma} \widehat{F}(\nu)\widehat{G}(\mu)$$

次に，$K[[x]]$ の基本的な形式的ベキ級数

$$e_k(x) := \sum_{\nu \geq 0} \delta_k(\nu) x^{\nu} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

$$\text{ただし，} \delta_k(\nu) := \begin{cases} 1 & (\nu = k) \\ 0 & (\nu \neq k) \end{cases}$$

を導入する．以上により，$K[[x]]$ は K 上の可換代数をなす．なお，**乗法単位** 1 は $e_0(x) = 1 + \sum_{\nu \geq 1} 0x^{\nu}$ である．

1.2　形式的ベキ級数の位数

1.2.1　位数

定義 1.4 $F \in K[[x]]$ について $F \neq 0$ とするとき，$\widehat{F}(\nu) \neq 0$ であるような最小の $\nu \in \mathbb{N}_0$ を F の**位数**（order）といい，$\omega(F)$ で表す．すなわち，

$$\omega(F) := \inf\{\nu \in \mathbb{N}_0 \mid \widehat{F}(\nu) \neq 0\}$$

ただし，$F = 0$（零級数）のときは，$\omega(\widetilde{O}) = +\infty$ と既約する．

■例

1) $F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$　　$\alpha_0 \neq 0$ の場合　$\Longrightarrow$　$\omega(F) = 0$
2) $F(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m+1} x^{m+1} + \cdots$　　$\alpha_j = 0\ (0 \leqq j \leqq m-1)$, $\alpha_m \neq 0$ の場合　$\Longrightarrow$　$\omega(F) = m$
3) $F(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots$　　零級数 $\widetilde{O}$ の場合　$\Longrightarrow$　$\omega(F) = +\infty$

1.2.2　位数の性質

命題 1.1 位数 $\omega : K[[x]] \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ は次の性質を有する．
$F, G \in K[[x]]$，$\lambda \in K$ とすると，

1) $\omega(F+G) \geqq \min\{\omega(F),\ \omega(G)\}$
2) $\omega(\lambda F) = \begin{cases} \omega(F) & (\lambda \neq 0) \\ +\infty & (\lambda = 0) \end{cases}$
3) $\omega(FG) = \omega(F) + \omega(G)$

命題 1.1 について，発見的導出を行った．

1.2.3　$K[[x]]$ の部分集合

定理 1.1 整数 $k \in \mathbb{N}_0$ が与えられたとき，位数が k 以上の形式的ベキ級数の部分集合

$$V_k := \{F \in K[[x]] \mid \omega(F) \geqq k\} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

に関して，次のことが成立する．

1) V_k は $K[[x]]$ の線型部分空間である．
2) $\forall G \in K[[x]]$，$\forall F \in V_k$ について，$GF \in V_k$ である．

□ この性質を，V_k はイデアルという．

定理 1.1 を証明した．

1.2.4　集合族の和の条件

定義 1.5 形式的ベキ級数の集合族 $\{S_i(x)\}_{i \in I}$ が和をもつとは，いかなる整数 $k \in \mathbb{N}_0$ に対しても，有限個の i を除けば位数 $\omega(S_i) \geqq k$ が成り立つことと定める．すなわち，位数が k 以下の S_i は有限個しかないので，**和**

$$S(x) = \sum_{i \in I} S_i(x)$$

が定義できるのである．定義から，位数 k 以下の S_i の個数は有限個であることを記号により記すと，

$$I_k := \left|\{i \in I \mid \omega(S_i) \leqq k\}\right| < \infty \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0)$$

そして，この条件を満たす形式的ベキ級数の集合を仮に**認容族**と称する．

1.2.5　認容族の一般和

1) 認容族 $\{S_i\}_{i \in I}$ について，$S_i(x) = \sum_{\nu \geq 0} \widehat{S}_i(\nu) x^{\nu}$ とするとき，
ν 番目の項の係数は，

$$\Big(\widehat{\sum_{i \in I} S_i}\Big)(\nu) = \sum_{i \in I} \underbrace{\widehat{S}_i(\nu)}_{\substack{\text{高々} \\ |I_\nu|\ \text{個}}} \in K$$

であるので，その一般和 $S(x)$ は

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{i\in I} S_i(x) \\ &= \sum_{\nu\geq 0}\Big(\widehat{\sum_{i\in I} S_i}\Big)(\nu)x^\nu \\ &= \sum_{\nu\geq 0}\Big(\sum_{i\in I}\widehat{S}_i(\nu)\Big)x^\nu \end{aligned}$$

と表され，$S(x)\in K[[x]]$ である．

2) $e_k(x) := \sum_{\nu\geq 0}\delta_k(\nu)x^\nu$ とすると，$\forall F\in K[[x]]$ は，

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\nu\geq 0}\widehat{F}(\nu)e_\nu \\ &= \widehat{F}(0)e_0 + \widehat{F}(1)e_1 + \widehat{F}(2)e_2 + \cdots \end{aligned}$$

と表現でき，改めて認容族の和として定義される．ここで，$\{\widehat{F}(\nu)e_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ は認容族である．

3) $\omega(F) = k$ のとき，

$$F = \sum_{\nu\geq k}\widehat{F}(\nu)e_\nu \quad \widehat{F}(k)\neq 0$$

と表示される．

1.2.6　形式的ベキ級数の標準形

1) $e_\nu e_\mu = e_{\nu+\mu}$ に注意すると，位数 k の形式的ベキ級数は，

$$F = e_k \underbrace{\sum_{\nu\geq k}\widehat{F}(\nu)e_{\nu-k}}_{\substack{\text{単元として}\\ \text{逆元を持つ}}}$$

として，「位数の基本項 × 単元」の標準形に表すことができる．

2) $F = e_m\sum_{\nu\geq m}\widehat{F}(\nu)e_{\nu-m}$，$G = e_n\sum_{\nu\geq n}\widehat{G}(\nu)e_{\nu-n}$ とすると，

$$FG = e_{m+n}\underbrace{\sum_{\nu\geq m}\widehat{F}(\nu)e_{\nu-m}\sum_{\mu\geq n}\widehat{G}(\mu)e_{\mu-n}}_{\text{ここが意味のある部分}}$$

1.3　形式的ベキ級数の形式的ベキ級数への代入

次に，形式的ベキ級数

$$S(x) = \sum_{\nu\geq 0}\widehat{S}(\nu)x^\nu, \quad T(y) = \sum_{\mu\geq 0}\widehat{T}(\mu)y^\mu$$

を考える．ここで，最も重要な条件として，$\widehat{T}(0) = 0$，すなわち，$\omega(T)\geqq 1$ を仮定する．

　このとき，

$$(S \circ T)(y) = S(T(y))$$

は意味を持つか（形式的ベキ級数であるか）どうかを検討する．

$$\omega\Big(\widehat{S}(\nu)(T(y))^{\nu}\Big) = \begin{cases} \infty & (\widehat{S}(\nu) = 0) \\ \nu\omega(T) & (\widehat{S}(\nu) \neq 0) \end{cases}$$

$$\because \quad \omega(T^{\nu}) = \nu\omega(T)$$

$$\therefore \quad \Big\{\widehat{S}(\nu)(T(y))^{\nu}\Big\}_{\nu\in\mathbb{N}_0} \text{ は認容族である．}$$

$$\therefore \quad S(T(y)) := \sum_{\nu\geq 0} \widehat{S}(\nu)(T(y))^{\nu} \in K[[x]]$$

故に，$S(T(y))$ は意味を持つ．